

**l'enseignant
un créateur**



**INSTITUT
RUDOLF
STEINER**

Les triangles existent-ils?

Vers une approche phénoménologique des mathématiques et de leur enseignement.

Mémoire de fin d'étude de

Benjamin Bourgeois

Formation pédagogique et artistique

Institut Rudolf Steiner

Promotion ABRACADABRA
(2007-2010)

Remarque préliminaire

Ce mémoire sera à l'image de cette remarque: dense, trop vite fait et incomplet.

Remerciements

J'aimerais particulièrement remercier **Luc Lismont** et **Raymond Burlotte**, qui m'ont fourni au cours de ces années, moult matière à réflexion et points d'appuis pour me lancer à la conquête du monde.

J'aimerais aussi remercier **Francesca** de m'avoir soutenu et supporté, **mes collègues de promotion** d'être qui ils sont, et **les formateurs de l'Institut** pour leurs apports et leur aide. Enfin, et même si ça fait un peu con, je voudrais préciser que je suis très reconnaissant à **Steiner, Goëthe, Tycho Brahé et tous les autres scientifiques** sans le travail desquels le monde ne nous serait pas aussi accessible.

Table des matières

Remarque Préliminaire.....	2
Remerciements.....	2
Première Partie - Les triangles existent-ils?.....	4
Le puits sans fond des questions lancinantes.....	6
Le bout libre de la pelote de triangle.....	8
Seconde Partie - Un exemple appliqué : l'enseignement des fonctions.....	10
Histoire et enseignement des mathématiques.....	10
Enseignement – le chemin vers les fonctions.....	15
La fonction – première caractérisation phénoménologique.....	17
Enseignement – l'introduction de la fonction et l'art de poser des questions.....	19
Conclusion.....	23
Appendices.....	25
Appendice 1: Repères Chronologiques.....	25
Appendice 2: Bibliographie.....	25

Première partie

Les triangles existent-ils?

Le regard dans le ciel nocturne, je remarque trois astres plus brillants que les autres. Du doigt, je pointe le premier, puis le second, le troisième et enfin de nouveau le premier. J'ai dessiné un triangle. Mais ce triangle, quelle est sa réalité? Les étoiles que j'observe existent ; je les perçois, je les conçois. Mais ce triangle, je le conçois, mais est-ce que je le perçois?

Physiquement, non. Physiquement, je vois trois minuscules disques lumineux, trois taches brillantes sur un fond sombre. Je ne perçois pas ce triangle, je le superpose à mes perceptions. D'où vient ce triangle, ce concept que je superpose ainsi?



Pour répondre à cette question, partons quelque chose de plus concret. Si je pense à un bouleau, à celui près de chez moi par exemple, je n'ai aucun doute qu'il existe. Je peux le voir, le sentir, et même m'y cogner quand je marche en regardant passer les filles. A côté de lui, un autre bouleau. Différent, infiniment différent. Et pourtant, indéniablement bouleau. Qu'est-ce que ces deux bouleaux ont en commun? Pourquoi sont-ils « bouleau »? *Qu'est-ce qu'un bouleau?*



Pour répondre à ces questions, je commence par *observer*. Qu'est-ce qu'un bouleau? J'observe, et puis je pense ce que j'ai observé. Ainsi, je pense le bouleau. Facile, non? Tronc mince et élancé, souvent peu ramifié et de petite section. Couleur blanche, résistant bien au froid. C'est l'arbre qu'on retrouve le plus au nord, dans les toundras. Ses feuilles sont menues, légèrement dentelées et allongées. Elles ne sont pas denses, mais laissent passer la lumière et tremblent dans le vent. Le branchage est fin, comme un brouillard de branchettes autour du tronc. Les bouleaux poussent volontiers de façon grégaire, serrés. Tout dans le bouleau semble serré, retenu et en même temps vigoureux, résistant. Une certaine intensité retenue s'en dégage. L'écorce est riche en huile et brûle très bien. Au printemps, la sève monte avec vigueur, au point qu'on peut l'entendre avec un stéthoscope et la voir jaillir d'un rameau coupé...

En faisant ce travail, en pensant les observations, nous sommes moins le créateur de nos pensées que le *siège* celles-ci. Elles se déroulent organiquement, se dévoilent et se relient dans notre esprit. On pourrait dire qu'elles se pensent elles-mêmes, chaque pensée étant le fruit d'une observation ou d'une autre pensée. Ainsi naît en nous une représentation toujours plus élaborée de ce bouleau, et ensuite *du* bouleau. Ainsi se dévoile la réalité non matérielle de cet arbre: en laissant

penser en moi les observations. Comme si la lumière révélait petit à petit un corps qui était dans l'ombre.

Par mon observation, je fragmente le bouleau en plein de petits morceaux. Alors que le bouleau est un tout, je fais la distinction entre une feuille et une racine, entre la couleur d'une feuille l'été et en automne. Par mon esprit d'analyse, je désagrège pour pouvoir le penser. Ensuite, je cesse d'observer. Je me retire en moi et repense ces observations. Je les organise comme je les ai vues. Je les organise dans le temps et dans l'espace. J'élabore, par mon imagination, une image vivante aussi précise que possible du bouleau. Je l'imagine dans ses métamorphoses en une année, lors de toute sa croissance. En faisant ainsi, je réunis ces éléments que j'avais séparés. Ce qui était uni hors de moi, je l'ai brisé par mes sens puis reconstruit en moi par mon penser. Et ainsi, lors de cette reconstruction, je vis intérieurement sa loi de métamorphose. Je la connais.

Ce processus n'est pas sans rappeler celui de la digestion. Un aliment va être broyé, brûlé, attaqué par une quantité et une variété incroyable d'acides jusqu'à être réduit en infimes parties individualisées. Elles sont alors absorbées pour être ré-élaborées par l'organisme humain.

Il suffit de regarder puis de recréer en soi. Ces pensées sont les lois du bouleau. Il ne pourra jamais porter de gland, ni donner naissance à un chat ou avoir des racines comme une grosse carotte. Ce qui fait qu'un bouleau est un bouleau, voilà ce qui se pense en moi. C'est là l'autre moitié de l'arbre, aussi importante que la première. Sans ces lois qui se matérialisent, pas d'arbre. Sans matière où incarner ces lois, pas d'arbre. Réalité du monde: *matière* et *loi*. Pour moi, *perception* et *penser*. Perceptions éclairées de pensées ; pensées croissant organiquement à partir des perceptions. La réalité naît en moi par l'union de ces deux mondes dont nous sommes citoyens.

Le lieu de la réalité est en nous. Mon frère ramène du Mozambique un objet que je n'ai jamais vu, dont je ne sais ce qu'il est. Je n'ai pas de doute sur son existence matérielle, mais qu'est-ce qu'il est? En réalité? Je ne m'approche de la réalité de l'objet qu'en en découvrant le concept qui est derrière. Celui qui a créé cet objet l'a d'abord pensé. Si je ne le fais pas moi aussi, je me retrouverai devant un agrégat de matière dont le plus important m'échappe. La réalité est perception et penser. Plus je pénètre mes perceptions de penser, plus je pénètre la réalité du monde qui m'entoure. Peut-on dès lors douter que le concept de bouleau existe tout comme existe l'arbre qui m'a attaqué? Si le concept clair de bouleau, avec toutes ces lois de croissances, d'implantation dans le monde, n'existait pas, je ne me serais pas cogné sur un bouleau !

Et mon triangle dans tout ça ? La pensée, oui. **Mais la perception?** Je ne peux voir, toucher ou entendre un triangle. D'où vient l'idée de « *triangle* » s'il n'y a pas de perception?

Prenons par exemple Pierre, fils de Frédéric et Sandra. Il est encore très jeune. Il peut à peine parler et joue avec des cailloux. Assis par terre, il en pose un premier, puis un second, puis un troisième. Rien de plus banal que trois cailloux au sol.



Puis, il s'illumine. Il reprend une poignée de cailloux et les pose les uns à la suite des autres en lignes droites entre les trois premiers cailloux. Un triangle de cailloux.



D'où lui est venue cette idée? Imaginons qu'elle ne lui soit jamais venue avant. Pas un seul triangle n'avait encore pénétré son esprit. Il n'avait donc jamais vu ou perçu de triangle ; il ne les aurait pas reconnus. Et pourtant, l'idée est *venue*, hors de rien, comme une illumination. Nous connaissons tous ce genre d'illumination, ce « *j'ai compris!* » qui fait sourire la bouche, briller les yeux et réchauffe la poitrine.

D'où lui est venue cette idée du triangle? Pierre l'a-t-il créée? Il ne sait pas encore réfléchir, élaborer. Il semble plutôt qu'elle soit venue, simplement venue, comme une perception... Comme si, regardant une colline boisée, je ne voyais rien de spécial jusqu'à ce qu'une tache colorée me saute aux yeux. Une tache qui bouge. Un cerf ! J'aurais très bien pu regarder cette colline sans percevoir cette tache, tout comme Pierre avait vu mille fois trois cailloux ou trois droites sans percevoir de triangle. Puis, un jour, il l'a perçu. Il a « reçu » cette pensée comme une perception de l'esprit, une perception spirituelle. Et il continuera d'en être ainsi toute sa vie. Car vous le savez bien, toute notre vie, nous comprenons des choses qui nous étaient opaques la minute précédente. Nous comprenons sans cesse mieux le monde. Nous en pénétrons sans cesse plus la réalité. Nous braquons sur lui des phares de penser sans cesse plus puissants et pénétrants.

Quelle est la réalité du triangle? Existe-t-il, *LE* triangle?

Pour exister pour moi, un bouleau nécessite une perception et un concept réunis par moi. Mais dans le cas du triangle, la perception est déjà faite en *pensée*. La perception est déjà hors du monde matériel. Elle est une perception d'esprit. Autrement dit, dans le cas du triangle, la perception *est* concept ! **L'existence du triangle est prouvée par le fait que le concept de triangle est pensable.** L'existence du triangle est prouvée par le fait que, sans doute pour chaque être humain, un jour, l'idée de triangle est apparue dans son esprit.

Mais, tel l'escadron de mouches suivant la glace du petit Pierre, une flotte de questions aborde dès la réponse apportée. Suffit-il donc de penser quelque chose pour que cette chose existe? Et où existe-t-elle, puisque ce n'est pas dans le monde physique? Et que se passe-t-il si on pense quelque chose de faux?...

Le puits sans fond des questions lancinantes

« *Qui pense peu se trompe beaucoup* »
Léonard de Vinci

« Je suis pensé, donc je suis », pourrait glorieusement écrire notre triangle sur son propre fronton. Mais est-ce aussi simple? Si je pense quelque chose de faux, est-ce que cela existe? Prenons un exemple d'une pensée clairement fautive: « il existe une figure géométrique plane de trois angles et quatre côtés: un triangle quadrilatère ». Quelle est votre réaction, sain lecteur, à la pénétration de cette idée ? Choquante ! Stupide ! Absurde, n'est-il pas ? Impossible même ! Oui,

impossible. Une telle entité n'existe pas et n'existera jamais. Elle ne peut exister. Elle n'est pas *pensable*. Celui qui prétendrait la penser se tromperait ou mentirait.

Cette idée est fausse parce qu'elle est impensable. Elle est impensable parce qu'elle est fausse. **Qu'est-ce qu'une idée?** La réunion organique de deux concepts : penser à ce qu'est le *haut*. Pensez-le profondément. Qu'est-ce que le haut? Essayez un instant de vous vider de toute autre pensée. Ne cherchez pas à en donner une définition, mais plutôt à caractériser le *haut*. Ensuite, quand vous l'aurez fait, lisez la ligne suivante.

Vous l'avez fait? Ne sort-il pas naturellement de ce concept celui du *bas*, de *verticale*, et encore d'autres? Le haut accouche du bas. Et l'inverse est également vrai. Nous avons deux concepts organiquement liés: le haut et le bas. Si je déclame que « le haut est l'inverse du bas », c'est une assez bonne idée, non? Et voilà, **une idée juste**. Deux concepts unis justement, pris dans un troisième qui les relie !

Maintenant que nous avons compris ce qu'est une idée, nous pouvons comprendre ce qu'est une **idée fausse**. Ce serait relier des concepts qui ne le sont pas. Comme tenter d'assembler deux pièces de puzzle qui ne sont pas faites pour s'unir. Nous pensons faux lorsque nous juxtaposons des concepts sans atomes crochus. Nous maintenons artificiellement dans notre esprit, comme si on les entourait de scotch pour qu'ils tiennent, deux concepts qui n'ont rien à faire ensemble. Et comment arrivons-nous à faire ce tour de force? Le plus facilement du monde: *en ne pensant point* ! Si on pensait vraiment ces concepts, on se rendrait compte qu'ils sont in-liables. On se rendrait compte qu'on n'arrive pas à les faire rentrer dans un troisième plus grand, une idée globale les unissant organiquement. *Ainsi, nous pensons faux quand nous ne pensons pas !*

Mais quelle beauté que de comprendre quelque chose ! Se rendre compte que deux mondes n'en sont en fait qu'un seul plus grand. Réaliser que des phénomènes apparemment indépendants sont profondément liés en une entité majeure qui leur donne sens. Connaissez-vous ce plaisir, le plaisir de *com-prendre*, de prendre en soi, une entité qui donne un peu plus de sens au monde. C'est comme manger une ampoule : après, on voit mieux dans l'obscurité !

Se tromper, au contraire, c'est vivre avec, à l'intérieur de soi, quelque chose qui n'est pas réel. Se tromper, c'est quitter la réalité, cesser de la réfléchir dans le miroir de notre esprit. C'est porter à l'intérieur de soi une carte routière faussée sans s'en rendre compte.



Je voudrais aussi aborder une autre question importante: *Où existe le triangle et de quoi est-il fait?*

Ce triangle de plastique que suce interrogativement le petit Pierre n'est pas *LE* triangle, c'est juste un objet dont une des qualités est d'être, de face, vaguement triangulaire. On pourrait parler d'une **incarnation matérielle du triangle idéal**. Mais où qu'il est, ce triangle idéal? Clairement, dans l'esprit de celui qui le pense. Est-ce tout? Et si personne n'avait jamais pensé au triangle, est-ce qu'il existerait? Toutes ces idées, tous ces concepts pas encore pensés et qui le seront, existent-ils déjà?

Prenons ces questions par un autre bout: *où le petit Pierre a-t-il perçu la pensée du triangle?* Car s'il l'a perçu, il faut bien que ce soit quelque part. Et comment l'aurait-il perçu dans son esprit, puisque ce concept ne s'y trouvait pas encore? Il faut donc qu'il l'ait perçue *hors* de lui-même. Il faut donc que le concept de triangle existe hors du petit Pierre avant que le petit Pierre ne le pense. *Il faut donc que les pensées, les concepts, existent en dehors des penseurs !* Tout comme les objets

matériels existent et attendent d'être perçu, il faut que les pensées existent, attendant d'être pensées. Un monde où vivent les concepts, comme des poissons dans l'eau. Et de quoi serait fait ce monde? De quoi est fait notre triangle? Le poisson est un morceau de toute la matière de l'univers, une partie individualisée qui vit en son sein. Notre triangle, lui, est fait de penser, d'esprit. Hors de nous, les concepts vivent dans un monde d'esprits indépendants. Un monde spirituel, peuplé d'êtres spirituels tels notre triangle idéal. Un monde spirituel auquel nous avons accès, puisque nous pouvons en percevoir les êtres. Un monde auquel nous appartenons au même titre que celui de la matière. Dedans. Immergés. Nos yeux, faits d'une part de la matière de l'univers, perçoivent la matière. Notre penser, notre esprit, fait d'une part de l'esprit de l'univers, perçoit l'esprit. Grâce à notre esprit et à nos sens, nous percevons pensée et matière, et tel un pont entre deux mondes, nous en faisons la synthèse pour découvrir, morceau par morceau, l'infinie réalité...

Scandaleux?..... Faux?..... *Impensable?*

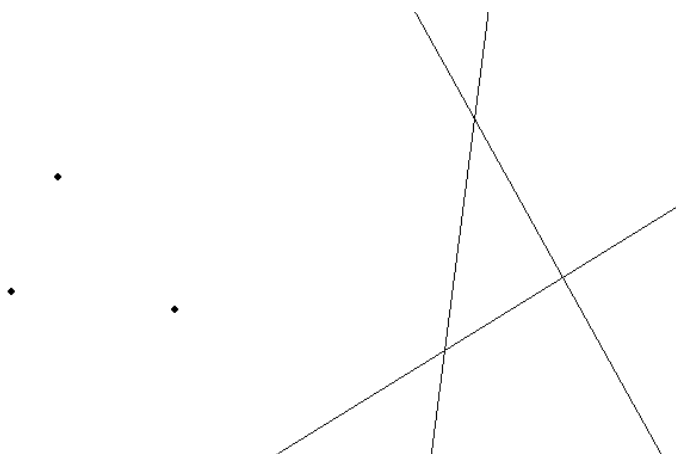
Mais une question subsiste encore: un concept ne peut exister dans notre esprit s'il n'est pas pensé activement par nous. Les concepts qui existent hors de notre esprit, attendant d'être pensé/perçu par nous, sont-ils là comme des cailloux dans un désert, ou sont-ils eux aussi pensés par un être? Et si oui, par qui?

Le bout libre de la pelote de triangle

Bon, on en a beaucoup parlé, mais tout le monde est-il au clair sur ce qu'est un triangle? Pourrais-tu, cher lecteur, le définir? Serait-ce suffisant pour le connaître? L'aurais-tu alors pensé jusqu'au bout?

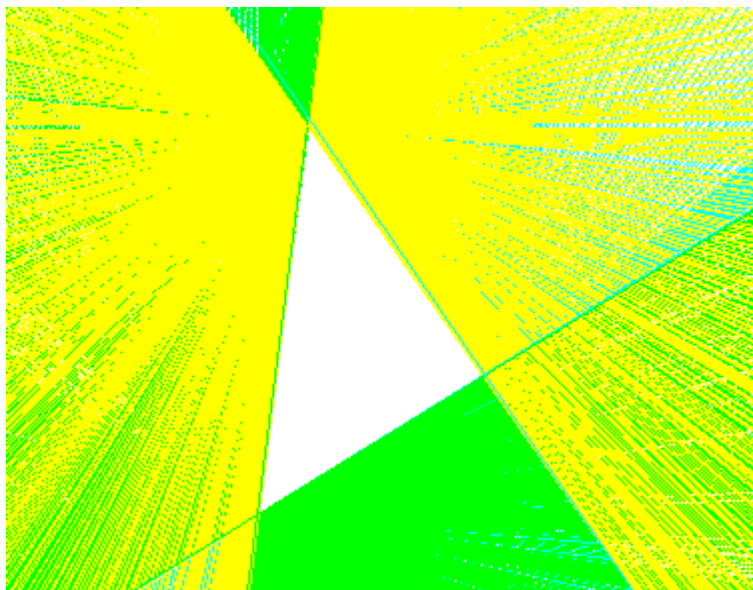
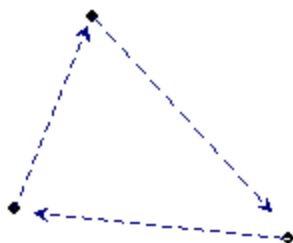
Voyons un peu. Saisissons la première idée que nous avons sur le triangle et, comme le bout de laine pendant d'une pelote, tirons dessus pour voir ce qui se passe. Laissons donc le concept du triangle accoucher organiquement toujours plus de lui-même.

De quoi avons-nous besoin pour avoir un triangle? Les êtres élémentaires de la géométrie plane sont les points et les droites. Ils sont comme l'œuf et la poule: deux points déterminent une seule droite, mais deux droites se coupent elles aussi en un unique point. A partir de ces deux êtres élémentaires, tracez donc un triangle de points et un autre de droites.



Avons-nous là nos triangles? A vrai dire, l'impression est plutôt d'avoir soit trop, soit pas assez. Que pouvons-nous ajouter pour obtenir un triangle? Comment passer de ces ébauches à de vrais triangles? On aurait envie de *couper* les droites pour en obtenir des segments. Mais peut-on couper une droite? Une droite est une droite infiniment. Si vous la raccourcissez, ce n'est plus une droite. C'est une autre chose. Non, pour avoir des segments à partir de droites, il faudrait avoir une longueur, une position dans l'espace,... tout cela serait très compliqué. Or, pour le moment, nous

n'avons que des droites et des points. Rien d'autre. Un tel segment semble déjà très complexe pour expliquer le plus simplement possible un triangle. Non, le secret réside ailleurs. Et cet ailleurs est le *mouvement*. Faites-moi bouger ces points le long de droites, faites-moi bouger ces droites sur des points... et le triangle apparaîtra.



A partir de trois points, seules trois droites existent. S'ils se déplacent jusqu'au point suivant sur ces droites, les points dessinent un triangle. Nous avons ici un espace clos par trois *segments* résultants du mouvement rectiligne de ces points.

A partir de trois droites, seuls trois points existent. Si elles se déplacent (pivotent) sur ces trois points jusqu'au point suivant, les droites enclosent un triangle. Nous avons donc ici un espace limité par une surface balayée par la rotation de trois droites, c'est à dire trois *angles*.

Voici donc, dès le premier pas, une série de découvertes hautes en couleur: la double nature du triangle, l'existence de *segments* et d'*angles*. Voyez-vous déjà la richesse de cette observation par rapport à une définition? Percevez-vous l'univers de questions naissant de cette découverte? D'où vient cette polarité droite-point? Jusqu'où mène-t-elle? Que se passe-t-il si d'autres droites ou points viennent se mêler au triangle, si plusieurs triangles sont mis en relation? Qu'apparaîtra-t-il si je commence à mesurer? Que verrais-je si je traçais ce triangle non plus sur une surface plane, mais sur une surface courbe?

Je ne vais pas traiter ici ces questions. Il y a un monde derrière. Mais au lecteur avide, je ne peux que conseiller de se plonger dans la géométrie projective [3].

Seconde Partie

Un exemple appliqué : l'enseignement des fonctions

Prenez une personne lambda. Il y a une certaine probabilité qu'elle garde certains mauvais souvenirs de ses cours de mathématiques. Lorsque quelqu'un me demande ce que je fais, et que je réponds que je suis professeur de mathématiques, très souvent, une réaction tombe à vif: « Moi, j'ai toujours été nul en math (*rire*) ! ». Et là, on vous explique. Ça va du blocage depuis la première enfance (« Oh là là, les soustractions ! J'y travaillais des heures avec ma maman!») au décrochage plus tardif (« Jusqu'à la Xème classe, ça allait. Mais à un moment, j'ai décroché. Ça devenait trop abstrait pour moi »).

De par mon expérience, j'ai pu constater que ce *moment* correspond souvent à l'introduction des fonctions, dérivées et intégrales. Beaucoup ne les ont jamais comprises, n'ont jamais pu les relier à ce qu'ils connaissaient, et encore moins les aimer.

Comment éviter cet écueil? Comment arriver à accompagner cette abstraction nécessaire pour qu'elle garde du sens, qu'elle conserve ses racines fichées dans la réalité et qu'elle aide l'élève à faire évoluer son esprit et sa connaissance du monde? D'ailleurs, qu'est-ce que des fonctions pourraient apprendre à un élève sur lui-même et sur le monde?

Toutes ces questions sont liées au développement de la première partie de ce mémoire. Je vais essayer de développer les différents concepts afférents aux fonctions de façon organique, phénoménologique, afin qu'elles dévoilent elles-mêmes le lien qu'elles ont avec le monde et nous.

Je tenterai également de faire un va-et-vient entre la description de ce processus et la manière de l'enseigner.

Histoire et enseignement des mathématiques

Quel est le lien entre la maturation de l'esprit d'un élève à l'adolescence et la maturation de l'esprit de l'humanité depuis environ deux mille ans? En m'inspirant des cours de mes collègues de Colmar (Luc Lismont et Noëlle Martin), des indications données par R. Steiner [7], de ce que j'ai pu récolter à droite à gauche et de mes propres expériences, j'en suis arrivé à penser le cours de math sur quatre ans de la façon suivante:

<i>Classe</i>	<i>Matières vues</i>	<i>Période historique</i>
9 ^{ème} (14-15 ans)	Algèbre: retour sur les équations, les formules de bases, etc. Possibilité d'approfondissement avec les équations du second degré, les systèmes d'équations, etc.	Moyen Age Arabe
	Géométrie Euclidienne Retour sur les bases, utilisation de la démonstration, Théorème de Pythagore et autres petits théorèmes. On poussera jusqu'au théorème de Thalès pour aborder l'idée d' <i>incommensurabilité</i> .	Grèce antique
	Histoire de la numérotation	Sumer, Egypte antique, Grèce antique, Inde antique,...
	Analyse Combinatoire	XVII ^{ème} siècle (B. Pascal)
	Dessin Géométrique dans l'espace, perspective cavalière	Moyen Age
10 ^{ème} (15-16 ans)	Trigonométrie Trigonométrie dans le triangle, cercle trigonométrique, arpentage	Début en Grèce Antique, développements ultérieurs lors des Grandes Découvertes (navigation, astronomie)
	Suite de Fibonacci, nombre d'or, logarithme Mathématique dans la nature, méthode de simplification des opérations longues	Début en Grèce Antique, développements ultérieurs lors du Moyen Age et Grandes Découvertes (commerce, navigation, astronomie)
	Algèbre Commerciale Fonctionnement d'une banque aujourd'hui, prêt, emprunt, annuité, etc.	Moyen Age et Grande Découvertes jusqu'à nos jours
	Géométrie vectorielle	XIX ^{ème} siècle
	Géométrie descriptive Interpénétration de solides, trois vues,...	Bas Moyen-Age, Renaissance
	Nature des nombres*	De la Grèce antique à nos jours
11 ^{ème} (16-17 ans)	Géométrie Projective	XVII ^{ème} siècle (Desargues)
	Géométrie analytique	XVII ^{ème} siècle (Descartes)
	Analyse Introduction aux fonctions	XVII ^{ème} siècle
	Astronomie	De la Grèce antique à nos jours
	Théorie des ensembles*	XIX ^{ème}

<i>Classe</i>	<i>Matières vues</i>	<i>Période historique</i>
12 ^{ème} (17-18 ans)	Analyse Dérivation et intégration*	XVII ^{ème} siècle (Newton Leibniz)
	Statistique	XVII ^{ème} siècle (Pascal et Fermat)
	Probabilité	XVII ^{ème} siècle (Pascal et Fermat)
	Géométrie analytique dans l'espace*	XVII ^{ème} siècle (Descartes)
	Géométrie projective*	XVII ^{ème} siècle (Desargues)
	Fractale*	XX ^{ème} siècle
	Préparation au BAC ou au passage en terminale	

* Si possible ou si nécessaire dans le cadre de la préparation au BAC

Tableau 1: Age - Domaine des Mathématiques - Epoque Historique

Comme on peut l'observer dans ce tableau, **l'apprentissage mathématique des adolescents suit grosso modo le parcours qu'a suivi l'humanité**. Ce n'est pas un hasard. En observant le développement historique des mathématiques, je me suis rendu compte à quel point cela s'est fait graduellement, apprivoisant des concepts sans cesse plus élaborés, avançant toujours plus dans le détachement du monde sensible, dans l'abstraction, mais de manière continue et assez fluide. Il s'agissait d'une recherche dont les trois dernières étapes se sont déroulées en Grèce, dans le monde musulman (Bagdad – Cordoue) et ensuite en Europe. A chaque fois, l'impression que j'ai est que les gens saisissaient les problèmes qui leur étaient posés dans la limite de ce que pouvaient concevoir leurs esprits. Et on remarque là une certaine uniformité pour une époque donnée ; tout le monde avait plus ou moins le même niveau de compréhension, la même conception du monde des nombres et des formes, puis un précurseur avance, timidement ou hardiment, quelque chose de nouveau. Souvent incomprise, voire rejetée au début, cette idée est acceptée petit à petit. Une question naît de cette observation: **est-ce que ce sont les nouvelles idées qui font mûrir et évoluer les esprits, ou bien, au contraire, sont-ce les esprits qui, évoluant, deviennent capables de comprendre de nouvelles choses?**

Mon expérience avec les adolescents me porte à penser que la réponse est: « un peu des deux ». J'ai l'impression que, dans le cadre de la maturation de l'esprit humain au cours d'une vie, il arrive des moments où l'esprit de quelqu'un, un élève adolescent dans ce cas-ci, est mûr pour comprendre une chose, par exemple les fonctions. Si on avait tenté de les lui enseigner avant, cela n'aurait pas fonctionné. Peut-être aurait-il appris à manipuler l'engin, comme un ordinateur, mais il n'aurait pas été capable de comprendre réellement ce qu'il faisait, d'en acquérir une conscience claire. En même temps, si lorsque l'esprit est mûr pour développer quelque chose de nouveau, les enseignants-éducateurs ne le lui donnent pas, il lui manquera quelque chose pour continuer son développement. Comme si on ne nourrissait pas un corps en croissance.

Je pense que l'on assiste au même phénomène au niveau historique. Les nouveaux concepts (et pas seulement les concepts mathématiques, mais aussi artistiques, spirituels, etc.) ont été acquis par l'humanité lorsqu'elle y était prête. Ils lui permettaient de pénétrer plus profondément dans la compréhension du monde, dans la réalité. Ils pénétraient dans l'humanité par quelques personnes éminentes, puis se répandaient lentement à toute l'humanité, permettant à tout le monde de faire ce développement, et nous préparant au successif. Ainsi, avec le temps et la maturation de son esprit, l'Homme rentrait sans cesse plus dans les lois cachées du monde, dans ce qui est, finalement, sa vraie chair.

On peut d'ailleurs se poser les questions suivantes : « **Où en est ce processus aujourd'hui?** Où en est-il dans la recherche scientifique? Quelles sont les nouveaux concepts découverts qui éclairent le monde sous un jour nouveau mais qui restent encore inconcevables pour la plupart? La science actuelle, ayant renoncé à la recherche de la vérité pour se contenter de modèles prédictifs, peut-elle encore remplir ce rôle de dévoileur du monde commun? Ne sommes-nous pas en retard d'une évolution? Le mal-être de tant de gens, et notamment des adolescents lors de leurs études, n'est-il pas dû à une faim spirituelle, à une soif d'une meilleure compréhension du monde qui tarde à venir? »

Δ

Je ne vais pas détailler avec précision pourquoi j'ai pressenti tel ou tel domaine des mathématiques pour telle ou telle tranche d'âge. Je vais plutôt me concentrer sur ce que j'ai pensé pour la **11^{ème} classe**, en me focalisant sur un point précis: **l'introduction des fonctions**.

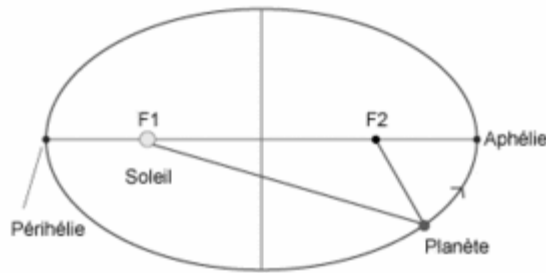
Comment cela s'est-il passé historiquement [2]? Il est difficile de tirer des siècles un créateur de ce que nous appelons *fonction*. Lorsque Galilée découvre sa loi de la chute des corps, il s'agit déjà d'une fonction ; la distance parcourue par un corps en chute libre est fonction du temps écoulé depuis son lâché. De même, le calcul des intérêts est une fonction qui ne dit pas son nom : les intérêts, capitaux et autres varient avec le temps. Mais, à ma connaissance, ces relations restent de simples relations particulières à leur domaine. On n'a pas encore vu, ou, en tout cas, réfléchi sur ce lien entre le calcul des intérêts et la chute des corps. L'outil de la fonction n'est pas encore né. C'est d'ailleurs ainsi que les fonctions sont introduites en dixième : sans le dire, sans le conceptualiser. On reste sur nos exemples de vitesses et d'accélération, déjà assez abstraits pour eux, sans en ajouter une couche en disant: « Vous voyez, en fait, la position, la vitesse et l'accélération sont trois fonctions différentes du temps ».

Au XVII^{ème} siècle, Descartes mis au point un système de localisation des points qui porte son nom (le repère cartésien). Celui-ci permet de faire un lien direct entre algèbre et géométrie. Des courbes autrefois purement géométriques (telles les droites, les paraboles, les ellipses, etc.) furent assimilées à de simples équations à deux ou trois inconnues. C'est ce que nous appelons aujourd'hui la **géométrie analytique**. Descartes en fut moins l'inventeur que la sage-femme; en gestation depuis plus d'un siècle, cette approche quantitative de la géométrie fut formalisé par lui dans sa forme quasi définitive avec la parution de *La Géométrie*, alors simple appendice à son célèbre ouvrage *Discours de la méthode pour bien construire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*, paru en 1637.

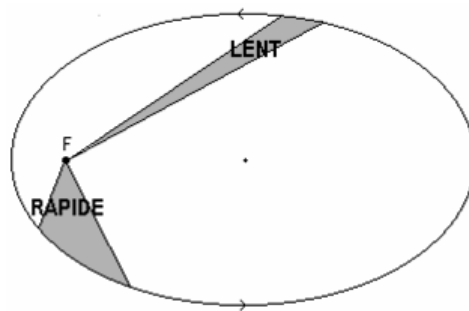
A la même époque, grâce aux observations astronomiques de Tycho Brahé, Kepler se mit à chercher à déterminer les orbites précises des astres dans un système héliocentrique*. C'est ainsi qu'il découvrit les trois lois qui portent aujourd'hui son nom. Jetons un œil à ces trois lois.

* Modélisation du mouvement des planètes dont le soleil occupe le centre.

I. Première loi ou « loi des orbites »: les planètes parcourent une orbite non pas circulaire, mais légèrement elliptique. Le Soleil occupe un des foyers de ces ellipses.



II. Seconde loi ou « loi des aires »: le segment imaginaire entre le soleil et une planète balaye des aires égales en des temps égaux.



Cela se traduit par le fait qu'une planète est plus rapide lorsqu'elle est proche du soleil et plus lente lorsqu'elle s'en éloigne.

III. Troisième loi ou « loi des périodes »: le carré du temps de rotation des planètes est proportionnel au cube de leur distance moyenne au Soleil.

$$T^2 = k \cdot R^3 \quad \text{ou encore, sous une autre forme:} \quad \frac{T^2}{R^3} = k, \quad \text{où } k \text{ est une valeur constante.}$$

Cette constante qui relie orbite et temps de révolution, et c'est là la magie, est la même pour toutes les planètes. Elle donne l'indice d'une loi interne aux planètes les liant toutes entre elles dans leur mouvement. Un genre d'harmonie céleste.

La première de ces trois lois put se suffire amplement de la géométrie analytique alors presque aboutie ; l'ellipse, son foyer, son excentricité sont facilement maîtrisables avec cet outil. Nous sommes là en présence de quelque chose d'immobile : une courbe. Cette courbe ne se déplace pas dans le temps, c'est la planète qui se déplace dessus.

La troisième loi, elle, nous fait quitter le monde purement géométrique. Le *temps* intervient. Il rentre en relation avec une distance. Comme dans l'exemple de la chute des corps, on voit se mélanger deux objets qui ne sont pas de même nature et qui pourtant collaborent. Le temps et l'espace. La géométrie telle que les grecs la pratiquaient n'a pas les moyens d'intégrer ainsi ce

temps. On sent que nous sommes là à une frontière. Cependant, malgré l'apparition du temps, cette relation reste relativement statique. Elle est définie une fois pour toute pour chaque planète.

C'est dans la seconde loi que se révèle vraiment un être mathématique nouveau. Non seulement le temps et l'espace y sont mélangés, mais en plus ils sont en constant échange, dialogue. On ne calcule plus ici une courbe ou une relation statique, mais la vitesse avec laquelle se déplace la planète. Cette loi met en relation la vitesse de la planète, sa distance au soleil, sa trajectoire et d'autres choses. Tous ces éléments changent constamment et harmonieusement. Ils ne sont jamais les mêmes. Cette relation harmonieuse est une fonction.

Phénoménologie?

On voit que cet objet mathématique relativement complexe n'est pas une création, une pure abstraction issue d'un mathématicien enfermé dans sa boîte. Cette relation se trouve dans les astres. Le talent de Kepler fut de la remarquer. Il recherchait l'harmonie céleste. Maniant les observations de Tycho Brahé, les tournant et retournant sur le papier et dans sa tête, les portant en lui, il a réussi à percevoir les lois de cette harmonie. Il a perçu les points communs de chaque mouvement. Cette fonction se trouvait déjà dans les planètes bien avant lui. Il a seulement réussi l'exploit de s'y ouvrir, de la percevoir au milieu de tout ce que l'univers donne à percevoir.

On sent bien à quel point cette relation complexe n'en est pas moins réelle. Si elle ne l'était pas, les planètes ne tourneraient pas ainsi.

Enseignement – le chemin vers les fonctions*

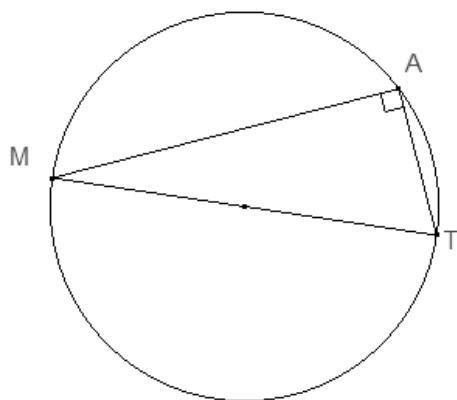
Comment, maintenant, faire parcourir ce chemin aux adolescents? Cet exemple historique nous montre superbement la différence entre une courbe fixe issue d'une équation et une fonction dont l'âme est le mouvement.

I. Dans un premier temps, pour introduire les premiers éléments permettant cette comparaison, je commencerais par la **géométrie analytique**. Lors de cette période, j'essayerais d'illustrer ce que je pourrais appeler « **la désincarnation de la géométrie** ». En effet, encore peu avant Galilée, la géométrie donnait le *la* des mathématiques. Ainsi, par exemple, si mettre un nombre au carré ou au cube avait un sens, un nombre « à la puissance 4 » était très difficile à concevoir, car contrairement au carré et au cube, il ne correspondait à aucune réalité géométrique. Ainsi, le monde des mathématiques était encore assez proche du monde des perceptions physiques. S'en éloigner n'était pas une chose naturelle. Il fallait toujours justifier que ce dont on parlait avait du sens. La démonstration géométrique, érigée en méthode, était la clé de voûte de cet art.

Avec la géométrie analytique, un phénomène nouveau apparaît. Les formes géométriques se réduisant à des équations, les démonstrations, de leur côté, se réduisent du coup à des résolutions de système d'équations.

Prenons un exemple. Un triangle inscrit à un cercle et dont un côté est le diamètre du cercle est toujours un triangle rectangle.

*J'ai souvent utilisé le conditionnel dans ce qui suit : « ...dans une telle situation, je ferais ceci ou cela... ». La cause en est que je n'ai pas encore testé ce que je propose ici. J'ai déjà donné toutes les périodes citées pour la 11^{ème} classe, mais je ne les ai jamais organisées avec la cohérence que je propose ici. C'est pourquoi je reste prudent dans mes affirmations.



Cette propriété aurait déjà été démontrée pour la première fois géométriquement par le fameux Thalès de Milet, sept siècles avant notre ère.

En géométrie analytique, il suffirait de prendre l'équation archétypale du cercle, de trouver l'équation correspondant aux trois droites du triangle, et ensuite de vérifier que le coefficient angulaire de AT soit bien l'opposé de l'inverse du coefficient angulaire de MA.

Les deux méthodes prouvent toutes deux de façon aussi décisive que l'angle A est un angle droit. Pourtant, elles diffèrent fondamentalement par le fait que la méthode géométrique reste dans la géométrie, dans les lignes et les points alors que la méthode analytique n'est que du calcul. La méthode analytique a le grand avantage de simplifier les démonstrations. Elles deviennent calculatoires. Mais ce faisant, on perd complètement de vue ce qu'on fait. On pourrait très bien ne pas savoir ce qu'on calcule, ne pas savoir quelles sont les implications de nos résultats. On devient beaucoup plus comme un ordinateur dans lequel on entre des données et qui calcule sans avoir la moindre idée de ce qu'il y a derrière.

C'est ainsi que la géométrie analytique produit un renversement. **Elle casse l'assujettissement de l'algèbre aux phénomènes sensibles, géométriques**, et transforme ceux-ci en de simples représentations de formules algébriques. Tout comme un ministre de l'emploi peut manipuler les chiffres du chômage sans connaître les réalités individuelles qui vivent derrière, elle permet de faire de la géométrie sans avoir conscience de phénomènes réels.

II. Avant ou après cette période*, je ferais la période de **géométrie projective**. Je ne vais pas ici m'étendre sur celle-ci. Je préciserais que la géométrie projective se trouve, d'un certain point de vue, en polarité avec la géométrie analytique. Elles ont toutes deux vu le jour au XVII^{ème} en France, l'une introduite par Descartes, l'autre par Desargues. Cependant, la géométrie projective n'a survécu que comme une branche mineure et anecdotique de la géométrie, alors que la géométrie analytique a vite été utilisée pour décrire presque tous les phénomènes physiques. A l'opposé de cet aspect calculatoire et abstrait, la géométrie projective tente de pousser plus loin la compréhension concrète du monde géométrique. En cela, elle reste donc fidèle à la géométrie euclidienne. Mais là où l'évolution se produit, c'est qu'elle sort des phénomènes sensibles et permet de concevoir l'**infini**. Contrairement à la géométrie analytique qui désincarne, cache le sens de ce que l'on fait, la géométrie projective va, elle, donner un sens concret à des choses qui n'étaient que ces concepts abstraits. Elle ouvre à la compréhension des domaines et des lois auparavant inaccessibles.

III. Viendrait alors le temps de l'**astronomie**. La première partie de cette période, que je ne vais pas détailler ici, est surtout une description des mouvements célestes tels qu'on peut les percevoir de la Terre. Les modèles de Ptolémée et Copernic-Kepler sont abordés en milieu de période avec, comme élément médian de cette polarité, le modèle de Tycho-Brahé. Abordant le travail de tous ces hommes, j'en viendrais à parler des recherches de Kepler et de ses trois lois. L'idée est de décrire d'abord le mouvement des planètes autour du soleil comme une pulsation. C'est en effet la conséquence de son orbite elliptique : les planètes ne restent pas sans cesse à la même distance du soleil, mais s'en approchent, s'en éloignent, s'en rapprochent, s'en éloignent à nouveau.

* Une *période* désigne en pédagogie waldorf une période de trois semaines pendant laquelle un même sujet sera travaillé tous les jours durant les deux premières heures de cours de la journée.

C'est ce que nous dit la première loi. La seconde loi met la vitesse en relation avec cette distance. Lorsque la planète s'approche, elle accélère. Arrivée au périhélie, le point le plus proche du soleil, elle a atteint sa vitesse maximum. Ensuite, s'éloignant, elle ralentit jusqu'à avoir atteint l'aphélie, point le plus lointain de son orbite à partir duquel elle va ré-accélérer. Et le miracle est que cette vitesse et cette distance sont dans une relation particulière, toujours la même : elles s'équilibrent parfaitement pour qu'un fil tendu entre le soleil et la planète balaye toujours la même surface en un même temps. J'essayerais de créer chez les élèves un sentiment d'émerveillement pour cette harmonie, cette pulsation des planètes. Si j'y arrive, cette image restera ancrée en eux. Ensuite, j'aborderais la troisième loi et continuerais la période d'astronomie sans plus m'étendre sur le sujet.

IV. Enfin viendra le moment proprement dit d'introduire **la fonction** comme objet mathématique à découvrir. Cette découverte progressive va prendre toute la fin de 11ème, une bonne partie de douzième et de la terminale. Je pense donc qu'en tant que professeur, il est nécessaire d'avoir dès le début une vue globale de ce qui sera fait tout au long de cet apprentissage.

La fonction – première caractérisation phénoménologique

Pour comprendre ce qu'est une fonction, pour pouvoir la caractériser, partons d'un exemple concret. Repartons, devrais-je dire, puisque nous allons utiliser de nouveau la loi des aires de Kepler.

J'ai affirmé que cette loi était une fonction. Mais avec ça, je n'ai pas encore dit grand chose sur les fonctions. Regardons-la donc de plus près.

Cette loi affirme que si on tendait une ficelle entre le soleil et une planète, la surface balayée par cette ficelle en, par exemple, six secondes sera toujours la même. Pour déterminer cela, Kepler a d'abord dû calculer cette aire. Il s'est rendu compte qu'elle était en relation avec quatre paramètres :

- la masse de la planète (m)
- sa distance par rapport au soleil (d)
- sa vitesse (v)
- le temps qui s'écoule (t)

De quel type de relation s'agit-il? Peut-on affirmer que c'est l'aire qui *dépende* de ces paramètres et pas le contraire? Tout variant ensemble, comment affirmer que c'est ceci qui influence cela, et pas le contraire? Autrement dit, est-ce que nous pouvons trouver une relation de cause à effet entre la modification des paramètres et la modification de l'aire? Ou bien la masse, la vitesse, la distance, etc., varient-elles, comme l'aire, en fonction d'une autre cause ?

Ces questions sont très importantes. Le fait que deux phénomènes soient en relation ne veut pas forcément dire que l'un est cause de l'autre. Ils peuvent être deux conséquences d'une même cause. Cependant, par manque de temps, je laisserai ces questions ouvertes pour le moment.

En observant un peu ces paramètres, on se rend vite compte que trois d'entre eux varient et que le dernier est fixe. La vitesse de révolution, la distance au soleil et le temps varient pendant la révolution. La masse de la planète, elle, ne change pas.

En observant d'encore un peu plus près, on peut voir que le temps change calmement, continuellement, linéairement. Par contre, la vitesse et la distance au soleil varient de façon cyclique. La planète décrivant une orbite elliptique autour du soleil, elle s'en rapproche et s'en éloigne périodiquement. Or, Kepler a remarqué que plus elle est proche du soleil, plus elle est rapide. On peut donc résumer les variations de ces paramètres de la façon suivante :

La MASSE est immuable						
... le TEMPS s'écoule, les secondes s'ajoutent aux secondes ...						
DISTANCE		minimum		maximum		...
VITESSE		maximum		minimum		...
Mouvement par rapport au soleil	<i>approche</i>	<i>périhélie</i>	<i>éloignement</i>	<i>aphélie</i>	<i>approche</i>	...

Tableau 2: Evolution des Paramètres de la Seconde Loi de Kepler

A travers ce tableau, on se rend bien compte que la distance au soleil et la vitesse varient aussi dans le temps. On observe donc que l'aire balayée par une planète dépend de paramètres qui sont soit immuables, soit liés au *temps*. L'aire balayée par une planète varie donc, *in fine*, par rapport au temps.

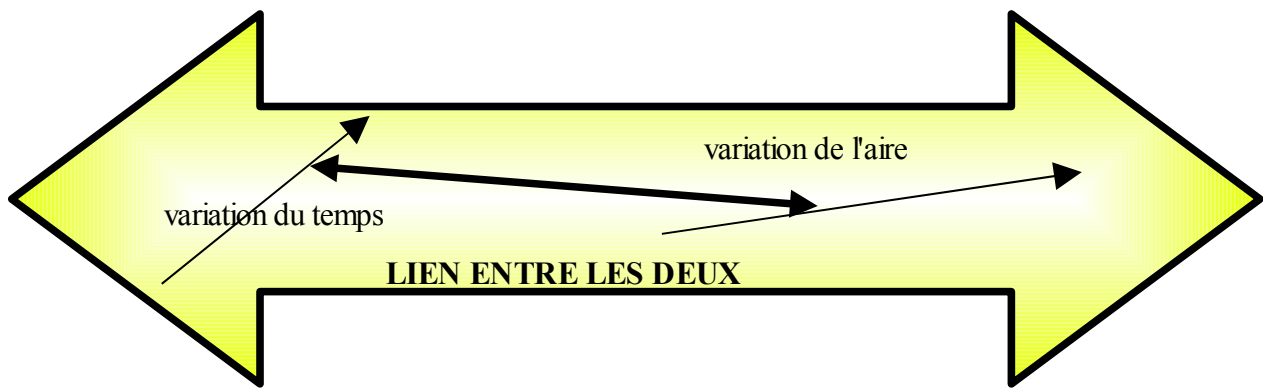
Mais qu'est-ce que cela signifie que de « varier dans le temps »? Comment cela se passe-t-il? Pourquoi ne parlerait-on pas de variation « avec le temps »? Pour tenter de répondre à ces questions, poussons l'examen de cette fonction un peu plus loin. Regardons numériquement la surface balayée par la Terre lors de sa révolution autour du soleil.

Écoulement du TEMPS (<i>t</i>), mesuré en heures	AIRE (A) balayée, mesurée en millions de milliards de km ²
1	8,82
2	17,64
3	26,46
4	35,28
5	44,10
...	...

Tableau 3: Temps Écoulé et Aire Parcourue

Ce tableau ne reprend que quelques valeurs faciles. On pourrait cependant prendre n'importe quelle durée et trouver l'aire parcourue. Il y a une évolution parallèle et continue entre ces deux grandeurs. On est là dans un phénomène dynamique. Choisissez une durée, vous trouvez le nombre de km² parcourus. Choisissez une aire, vous connaîtrez le temps nécessaire à la parcourir. On ne peut faire bouger l'un sans l'autre. Et où est la fonction là-dedans? Elle n'est pas dans la colonne de gauche, ni dans la colonne de droite. **La fonction est le lien dynamique entre les deux.** Elle est ce qui permet de relier numériquement ces deux grandeurs variables. Elle est comme les termes du contrat qui lie temps et surface parcourue.

On pourrait le schématiser de la façon suivante :



Pour analyser le mouvement de la terre autour du soleil, nous avons dû le séparer dans notre esprit en temps, vitesse, distance, masse et aire. Ceux-ci sont unis dans le mouvement réel de la planète. Nous avons dû, dans un premier temps, les dissocier, les réduire en des parties toujours plus élémentaires, semblant autonomes. Nous l'avons ensuite ré-élaboré en nous en découvrant, en pensant à l'intérieur de nous, ce qui les unissait hors de nous. La fonction est ce lien unificateur.

△

Nous avons ici franchi un pas. Bien qu'il soit évident que le travail de *com-préhension* de la fonction ne soit pas fini, nous avons réussi à atteindre une première étape de sa caractérisation. Voyons maintenant comment faire découvrir ceci aux élèves.

Enseignement – l'introduction de la fonction et l'art de poser des questions

L'idée générale est bien sûr de suivre le fil décrit ci-dessus. Mais le raconter tout cru n'est évidemment pas suffisant. Il ne suffit pas de se mettre face à la classe et de pérorer avec enthousiasme pour leur faire acquérir un nouveau concept, surtout si complexe.

Je pense qu'il est important de partir de l'observation. Que la phénoménologie ne soit pas juste un instrument de recherche pour les professeurs, mais bien une méthode scientifique, **un chemin vers la vérité auquel on tente d'éveiller les élèves**. Pour ce faire, la méthode que j'adopte est la bonne vieille **maïeutique** de Socrate : poser des questions pour que les élèves révèlent **eux-mêmes** les concepts derrière les phénomènes.

Je commencerais par réveiller le souvenir qu'ils auront des lois de Kepler. Par un jeu de questions, j'essayerais ensuite de leur faire isoler les paramètres dont j'ai parlé. L'idée est d'arriver à un tableau similaire à celui ci-dessus pour leur faire découvrir ce lien de base entre l'aire et le temps.

Je leur ferais ensuite calculer à partir d'une fonction simplifiée quelques valeurs de surface par rapport au temps pour arriver à un tableau de valeur similaire au tableau 3. Arrive alors Socrate:

- « *Quel est le lien entre ces deux colonnes de nombres?* »
- « *Quelle est sa nature?* »
- « *Comment relie-t-il ces grandeurs que sont le temps et l'aire?* »
- « *Comment pourrait-on l'écrire?* »
- ...

Cette partie est la plus difficile. Souvent, les élèves trouvent mes questions soit incompréhensibles, soit bateau. Il y a là un véritable art à développer pour parvenir à faire ressentir le mystère derrière un phénomène. L'art d'agencer les questions simples afin que, pas à pas, l'on s'enfonce dans les profondeurs insoupçonnées des phénomènes...

Mais je ne tenterais pas encore d'arriver à caractériser la fonction. Je ne la nommerais même pas. J'essayerais que les élèves arrivent à l'idée de grandeurs variant en fonction d'autres grandeurs, mais je ne m'appesantirais pas dessus. Je passerais à une autre fonction, très différente :

« Vous avez cuisiné un gâteau de 1200 grammes pour vos amis et vous, et vous êtes bien décidés à le manger entièrement. Si vous partagez ce gâteau de manière égale entre chaque ami, combien de grammes chacun aura-t-il? Faites un tableau représentant différentes situations. »

Cela aboutit au tableau suivant:

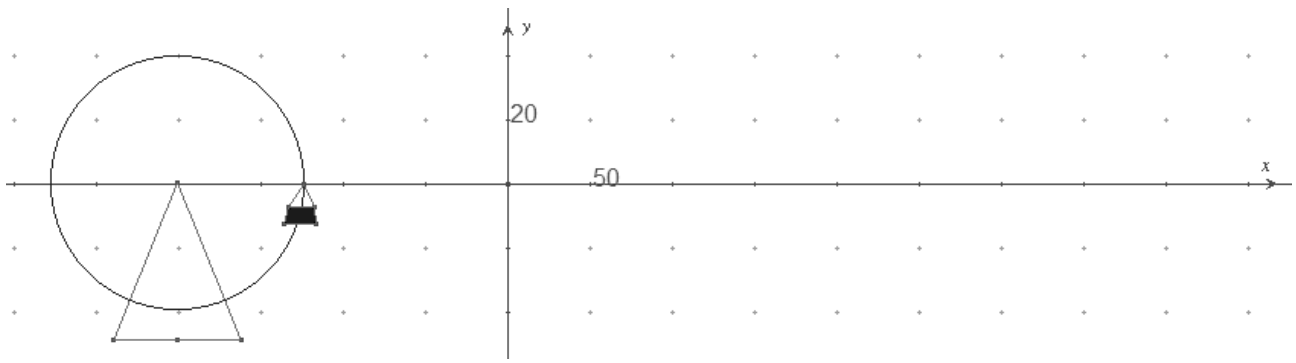
Nombre de personnes	1	2	3	4	5	6
Quantité engouffrée	1200 g.	600 g.	400 g.	300 g.	240 g.	200 g.

L'idée est alors, à nouveau, par un jeu de questions, d'exploiter de tableau pour mettre en évidence l'existence du lien naturel entre ces deux séries de valeurs. J'essayerais ensuite de faire émerger à nouveau l'idée d'un **lien dynamique** entre ces deux grandeurs. Si tout marche bien, quelques élèves devraient alors faire le lien avec la loi des aires. C'est un moment de secret bonheur pour le professeur.

Le but du jeu est maintenant de faire sortir les différences et les points communs entre ces deux liens (peut-être le nom *fonction* sera-t-il déjà sorti de la bouche d'un élève ; si ce n'est pas le cas, je pense qu'il est inutile de se presser). Grâce à cette comparaison apparaît l'idée que les grandeurs mises en lien ne sont pas forcément de même nature. Si se demander ce que vaudra l'aire parcourue en 1,2 heure a du sens, se demander en combien partager le gâteau pour 1,2 personne n'en a pas.

On peut continuer avec une troisième fonction encore différente, par exemple une fonction sinusoïdale, pour continuer à affiner la **caractérisation** :

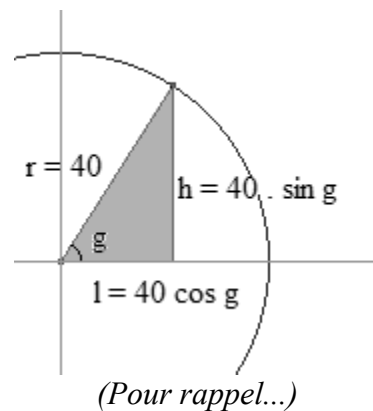
« Parmi les attractions de la fête foraine, une grande roue trône. Son rayon est de 40 m. Si g est la mesure de l'angle que parcourt une nacelle en grade ($400 \text{ grades} = 360^\circ$), exprimez la hauteur h de la nacelle par rapport au centre de la roue. »



grades	-50	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450
hauteur											

En se souvenant de ses leçons de trigonométrie, on trouvera facilement fonction:

$$h(g) = \dots$$



Cet exemple permet de caractériser un autre aspect important des fonctions : le fait que les deux grandeurs variables ne sont pas forcément interchangeables. Ici, chaque valeur d'angle donnera une seule valeur de hauteur. Par contre, une hauteur peut être obtenue par une infinité de valeurs d'angle différentes. Dans le premier sens, de l'angle vers la hauteur, il s'agit clairement d'une fonction. Mais qu'en est-il de l'autre sens? Est-ce encore une fonction si l'on peut obtenir plusieurs résultats pour une seule donnée?

J'arrête ici pour le chemin permettant de découvrir et s'appropriier le concept de fonction. Il va de soi qu'il peut être poursuivi de nombreuses façons, les caractéristiques des fonctions étant inépuisables. Mais avant de conclure ce chapitre, j'aborderais un dernier point pédagogique très important.

Si jusqu'à présent, j'ai toujours parlé **de caractérisation et jamais de définition**, c'est volontairement. Erasme faisait dire à la Folie dans son livre *L'Eloge de la Folie* : « Et pourquoi me définirais-je? Ce serait me donner des limites ! »

C'est là tout le problème de la définition : elle enferme, sclérose, met en boîte des concepts infiniment profonds. Définir strictement, c'est comme clôturer une parcelle et imaginer qu'il n'y a pas de continuité avec l'extérieur. La caractérisation est au contraire une exploration de territoires inconnus. On le voit se transformer en un autre, perçoit certaines délimitations naturelles telles une rivière ou une chaîne de montagnes. Mais d'où vient cette rivière? Comment ont poussé ces montagnes? Qu'est-ce qui se trouve derrière?

Alors que la caractérisation ouvre, la définition ferme.



Si tout ce chemin est bien mené, il arrive un moment où un **premier concept un peu abouti** de *fonction* voit le jour dans l'esprit des élèves. L'idéal est que ce soit eux qui trouvent le nom. C'est l'occasion de mettre par écrit ce qui a été découvert. C'est un moment délicat, car il faut à la fois fermer quelque chose pour pouvoir s'en servir, mais en même temps le laisser ouvert pour qu'il puisse s'enrichir. Il faut jouer l'équilibre entre la définition et la caractérisation. Pour reprendre l'image géographique développée ci-dessus, je dirais que l'explorateur doit cartographier ses découvertes.

On peut alors commencer à réfléchir sur la carte. On peut alors commencer à réfléchir sur la fonction. Comment écrire une fonction? Comment nommer ses différentes rivières? Comment se comportent-elles entre elles? Comment les représenter graphiquement?

Ce n'est qu'à ce moment-là que j'apporterais la représentation graphique de la fonction. Très souvent, les élèves confondent la fonction avec le graphique qui la représente. Je pense qu'aborder la représentation graphique après que le concept de fonction ait mûri devrait permettre de bien comprendre celui-ci comme une image du concept, et non le concept lui-même. Le professeur doit d'ailleurs être très prudent dans son langage et toujours faire la différence entre *la fonction* et *le graphe de la fonction*.

Je ferais alors travailler les élèves sur une série de fonctions variées, leur demandant à chaque fois un tableau de valeur, un graphique ainsi que de préciser ce que sont leur domaine d'existence et leur image. L'idée est, à partir de ces fonctions parfois élaborées, de les simplifier pour arriver à les percevoir comme des mélanges de fonctions plus simples. Ainsi, ce qu'on appelle « les fonctions de bases » apparaissent naturellement comme des formes très simples de fonctions dont la **métamorphose** peut donner presque toutes les autres.

Je pense qu'agir ainsi permet de conserver l'unité du concept de fonction en l'élargissant. Donner les fonctions de base de but en blanc, comme je l'ai fait jusqu'à présent, atomise un peu ce monde de la fonction et donne un sentiment d'arbitraire.

Conclusion

Quelle conclusion apporter alors que ce travail n'est qu'un commencement? Tout ce que j'ai développé dans ce mémoire pourrait très bien être une série d'idées séduisantes et rien de plus. Le défi, le réel défi, n'est pas d'écrire un mémoire, mais d'enseigner le mieux possible. Offrir à chacun l'occasion de gagner ses lettres de noblesse, lui apporter jour après jour de quoi briller de son propre éclat et se relever sans cesse après les échecs et coups durs pour devenir toujours meilleur : c'est là le vrai travail de l'enseignant.

Les obstacles sont nombreux. Les deux premiers sont sans doute le manque de *chaleur* et le manque de *lumière*. Impossible d'éduquer sans aimer et sans le faire sentir. Impossible d'aimer sans connaître l'autre. Impossible de connaître ses élèves sans relation chaleureuse. La lumière, elle, apporte sens au monde autour de nous. L'obscurité et l'abstraction « désincarnées » pourraient se révéler deux écueils polaires. Ne pas voir le monde ou en voir un mirage irréel, cela revient au même. Dans les deux cas, la première victime est le *sens*. Le sens de ce qu'on fait, le sens des phénomènes qu'on vit au quotidien. La méthode utilisée par le professeur se doit de reprendre et développer la manière dont n'importe qui comprend n'importe quoi. J'assiste à un phénomène. Je l'observe. Je me pose des questions. Je l'observe encore. Je caractérise ce que j'observe. Je l'imagine intérieurement. Pas à pas, par des allers-retours de ma conscience entre le phénomène extérieur et le phénomène intérieur, ses lois se révèlent à moi. Sa richesse se dévoile, son sens s'offre, et j'intègre son essence.

Cette méthode peut paraître plus lente. Mais en existe-t-il une autre qui mène à une vraie connaissance du réel?

Enseigner les mathématiques dans les grandes classes, c'est tenter de faire naître l'adolescent à un **penser vivant**. Un penser toujours mobile, où les concepts sont des pointes d'iceberg scintillantes dans la lumière et prometteuses dans les profondeurs. Un penser où les concepts sont toujours prêts à s'élargir, à se confronter au réel pour être remodelés, à se lier à d'autres en des racines communes. Les questions, les doutes mêmes, lui sont carburant. Détecter une erreur, une incongruité ou un manque dans un concept est la promesse d'une future découverte. L'opposé de ce penser vivant est le penser sclérosé, où chaque chose est bien délimitée, catégorisée, bien à sa place : la définition est donnée d'emblée, avant même la découverte du phénomène. La place pour la nouveauté n'existe pas. Tout est encassetté. Et ne posons surtout pas de questions, elles briseraient ces cloisons de la raison.

Enseigner dans les grandes classes, c'est également tenter d'apprendre aux élèves à apprendre. Leur montrer la méthode qui permet de découvrir la vérité par soi-même. Leur offrir l'opportunité de laisser gonfler la vérité dans leur poitrine comme un feu irradiant. Leur offrir l'opportunité de devenir de vrais scientifiques, des scientifiques de tous les jours et de tous les domaines. Des scientifiques d'eux-mêmes avant tout, mais du monde tout autant. Reconnaître le vrai, la connaissance de l'obscur et de l'hypothétique, de la conjecture et du mensonge. Que peut-on leur offrir de plus?

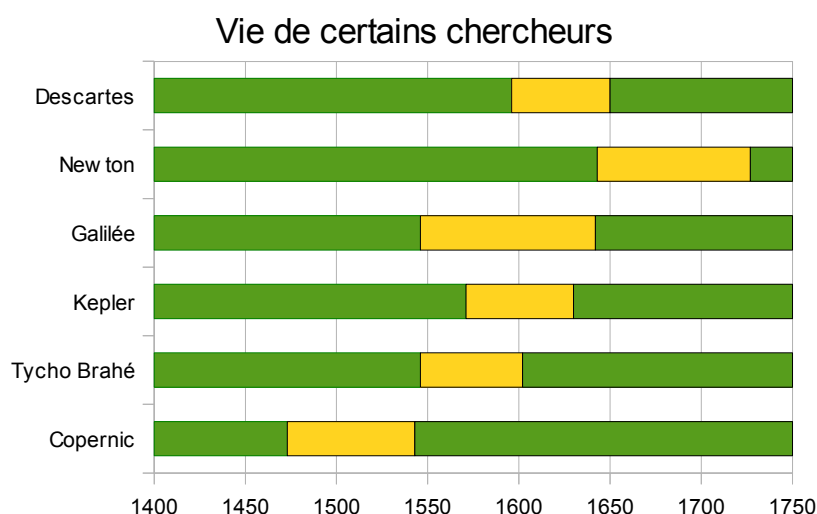
Or, cette capacité de reconnaître la vérité par soi-même est une condition *sine qua non* pour développer la liberté individuelle. Comment être libre si l'on est incapable de savoir juger de ce qu'on nous dit, si l'on est incapable de reconnaître un fait d'une illusion. On sera toujours le jouet de quelqu'un ou de quelque chose si l'on ne peut juger fermement par soi-même. La vraie connaissance est une condition *sine qua non* de la liberté.

Voilà, en quelques mots, ce qui pourrait être considéré comme une profession de foi. J'y vois

cependant plus. Car ce regard amoureux amenant à la découverte sans cesse plus poussée du réel est plus pour moi qu'une simple théorie. Bien qu'encore assez jeunot dans sa pratique, je ressens sa force. Le but est de transcender les points de vue, ne pas se contenter d'opinions personnelles n'ayant finalement aucune valeur. En tant que professeur, je me dois d'être toujours à la recherche de la vérité, du chemin vers la vérité. Je me dois de porter haut ce flambeau en moi-même si je veux donner l'occasion à mes élèves d'en percevoir quelque lueur.

Je suis conscient que je suis un professeur encore médiocre, loin en dessous de l'altitude de mes objectifs. Mais je sais aussi être sur ce chemin.

Appendice 1: Repères Chronologiques



Publication des travaux de Copernic : **1543**
Première et seconde lois de Kepler: **1609**. Troisième : **1616**
Discours sur la méthode – La Géométrie de Descartes: **1637**
Loi de la Gravitation Universelle de newton : **1687**

Appendice 2: Bibliographie

1. RONAN Colin, « Histoire mondiale des sciences », Seuil, 1988
2. AMNKIEWICZ Richard, « l'histoire des mathématiques », Seuil, 2001
3. ADAMS Georges, « L'espace physique et l'espace éthérique », in *le Monde Etherique*, Triades, 1998
4. BARUK Stella, « si $7 = 0$, Quelle mathématique pour l'école? » Odile Jacob, 2004
5. STEINER Rudolf, « une théorie de la connaissance chez Goëthe », EAR, 1985
6. www.wikipedia.org
7. STOCKMEYER Karl, « Éléments fondamentaux de la pédagogie Steiner », Fédération des écoles Steiner en France, 1998